536.4
C93
pam

4. *„Ueber die Fortpflanzung von Verdichtungsstössen in einem Gase“; von C. E. Curry.*

Ob Verdichtungsstösse [1]) in einem Gase auftreten können, und ob sie, wenn sie auftreten, ungestört fortschreiten können, ist schon mehrmals Gegenstand eingehender Betrachtungen gewesen, ohne dass es gelungen wäre, die Sache endgültig zu entscheiden. In seiner Arbeit „Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite“ [2]) erkennt Riemann die Möglichkeit des Auftretens von Verdichtungsstössen und unterwirft dieselben einer eigenen Behandlungsweise; — denn für solche Stellen eines Gases hören die Differentialgleichungen auf zu gelten, da dieselben unter der Voraussetzung abgeleitet sind, dass die Dichtigkeit und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Gases stetige Functionen des Ortes sind. — Hierdurch gewinnt er die Bedingungen, unter welchen Verdichtungsstösse sich in Wellen und in einzelne Verdichtungsstösse auflösen, während nebenbei die Unbekannten, wie z. B. die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der auftretenden Verdichtungsstösse, sich als Functionen der gegebenen Grössen bestimmen lassen.

Gegen dieses Verfahren von Riemann erhebt Tumlirz einen Einwand. [3]) Er meint, die Gesetze, deren mathematischer Ausdruck die Differentialgleichungen sind, könnten nie aufhören zu gelten. Da nun die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen schwerlich durchzuführen ist, so bringt Tumlirz zu diesem Zwecke die in den Differentialgleichungen ausgesprochenen Gesetze in Verbindung mit dem Princip der Energie, und zeigt, dass das Auftreten eines Verdichtungsstosses eine aus dem Princip der Energie fliessende Forderung

1) Riemann nennt einen Dichtigkeitssprung in einem in Bewegung gerathenen Gase einen „Verdichtungsstoss“.

2) Aus dem achten Bande der Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1860. Gesammelte Werke.

3) „Ueber die Fortschreitung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite.“ Beibl. 4. p. 861.

ungültig macht; woraus er schliesst, dass an einer Unstetigkeitsstelle eine Aenderung, welche die Auflösung der betreffenden Unstetigkeitsstelle herbeigeführt, eintreten muss, die noch nicht berücksichtigt wurde. Erst in einer späteren Arbeit [1]) schreibt er diese Aenderung an der Unstetigkeitsstelle einer Reflectionswelle zu; führt aber den darin ausgesprochenen Gedankengang leider nicht durch.

Im Folgenden werden wir nun die Richtigkeit der Riemann'schen Untersuchungen, insbesondere im Betreff des Aufhörens der Gültigkeit der Differentialgleichungen an einer Unstetigkeitsstelle, nicht bezweifeln, sondern wollen sofort dazu übergehen den wichtigen Einwand [2]) an die Spitze zu stellen, den Lord Rayleigh gegen die für eine Unstetigkeitsstelle von Riemann aufgestellten Gleichungen wegen der Nichtaufrechterhaltung der Gleichung der lebendigen Kraft erhoben hat. Diesen Einwand hat Tumlirz in einer anderen aber nicht so deutlichen Form [3]) ausgesprochen. Wir wollen uns von der Richtigkeit dieses Einwands überzeugen, indem wir zu diesem Zwecke zuerst den möglichst einfach denkbaren Fall untersuchen. Von demselben ausgehend, werden wir dann, indem wir eine von der Riemann'schen Theorie für Verdichtungsstösse etwas abweichende Theorie an die Spitze stellen, um den Einwand von Lord Rayleigh zu beseitigen, die verschiedenen Fälle untersuchen, die alle als specielle Fälle eines allgemeinen Falles anzusehen sind. Letzteren formuliren wir wie folgt: „In einem durch eine Röhre von dem Querschnitt Eins strömenden Gase trete ein Verdichtungsstoss auf, der sich mit der Geschwindigkeit $d\xi/dt$ von links nach rechts fortpflanze; — man kann in der That einen Verdichtungsstoss als etwa durch den Zusamnenstoss zweier Gase hervorgerufen denken. — Werde nun allen Grössen, die sich auf der linken bezw. rechten Seite eines Verdichtungsstosses beziehen, der Index 1 bezw. 2 angehängt. Ferner sei zu Anfang des Auf-

1) „Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen endlicher Schwingungsweite." Aus dem 95. Bande des Sitzungsber. der kaiserl. Akad. der Wissensch. II. Abth. Märzheft. Jahrgang 1887.

2) „The Theory of Sound" Macmillan & Co. London. Vol. II, §§ 253. p. 41.

3) Siehe Note 3 p. 460.

p 3485

tretens des Verdichtungsstosses die Dichte in dem linken Gase, die wir mit ϱ_1 bezeichnen wollen, wie ebenso die Dichte in dem rechten Gase, ϱ_2, constant: die Geschwindigkeit u_1 bez. u_2, der wir das positive Zeichen geben, wenn sie von links nach rechts gerichtet ist, — diese Richtung könnten wir etwa als die Ordinate x eines Coordinatensystems wählen — sei ebenfalls constant.“ Der denkbar einfachste Fall, den wir hier in Betracht ziehen wollen, um uns von der Richtigkeit des von Lord Rayleigh erhobenen Einwands zu überzeugen, soll sich nun von dem betreffenden allgemeineren Fall blos dadurch unterscheiden, dass wir den letzteren folgender Beschränkung unterwerfen: „Es soll sich nämlich der beim Zusammenstoss der beiden Gase entstandene Verdichtungsstoss nicht in zwei Verdichtungsstösse auflösen, sondern als einziger auftreten“; d. h. analytisch ausgedrückt: „es soll nach dem Auftreten des Verdichtungstosses kein anderer Druck als die zu Anfang des Zusammenstosses herrschenden Drucke p_1 und p_2, die überall constant [1]) sind, zum Vorschein kommen.“ Um unnöthige Verwickelungen zu vermeiden, wollen wir ferner diesen speciellen Fall noch dadurch vereinfachen, dass wir blos die relative Bewegung, etwa in Bezug auf den Verdichtungstoss selbst, der sich mit der Geschwindigkeit $d\xi/dt$ fortpflanzt, in Betracht ziehen. Die entsprechenden relativen Geschwindigkeiten, mit welchen sich das Gas gegen den Verdichtungsstoss bewegt, nämlich, $u_1 - (d\xi/dt)$ und $u_2 - (d\xi/dt)$, mögen alsdann durch v_1 und v_2 bezeichnet werden. Zur Behandlung dieses speciellen Falles gehen wir jetzt über.

Die Masse, welche durch die Unstetigkeitsstelle in der Zeit dt von links nach rechts hindurchgeht, ist $\varrho_1 v_1 dt$, welche gleich ist der in dieselbe Richtung heraustretenden Masse $\varrho_2 v_2 dt$: es lautet also die Continuitätsbedingung:

$$\varrho_1 v_1 = \varrho_2 v_2 . \tag{1}$$

Auf die ganze Gasmasse $\varrho_1 v_1 = \varrho_2 v_2$, welche in der Zeiteinheit durch die Unstetigkeitsstelle hindurchgedrungen ist,

1) Da der Druck p nach Riemann als Function der Dichte, nämlich $p = \varphi(\varrho)$, vorausgesetzt wird, und ϱ_1 und ϱ_2 in dem betreffenden Fall überall constant sein sollen, so sind p_1 und p_2 ebenso überall constant.

wenden wir jetzt das Princip der Bewegung des Schwerpunktes an. Es ist nun für das Zeitinterval dt:

$$(p_1 - p_2)\,dt = \varrho_1 v_1\,d\omega,$$

wo $d\omega$ der Zuwachs der Geschwindigkeit des Schwerpunktes der obigen Gasmasse während der Zeit dt und $p_1 - p_2$ die daraufwirkende Kraft bezeichnen. Indem wir diese Gleichung rechts und links integriren, und zwar von $t = 0$ bis $t = 1$, erhalten wir:

$$\int_0^1 (p_1 - p_2)\,dt = \varrho_1 v_1 \int_0^1 d\omega.$$

Würde auch $d\omega$ für die verschiedenen Zeitintervalle dt nach irgend einem beliebigen Gesetze verschiedene Werthe annehmen, so ist doch zur Zeit Null, der unteren Grenze des Integrals entsprechend, die in Betracht kommende Geschwindigkeit des Schwerpunktes die der ganzen Masse $\varrho_1 v_1$, nämlich, v_1, und ebenso für $t = 1$, der oberen Grenze entsprechend, v_2 Man erhält also anstatt der obigen Integralgleichung die folgende Relation:

(2) $$p_1 - p_2 = \varrho_1 v_1 (v_2 - v_1).$$

Diese Gleichung gilt ganz unabhängig von jeder Hypothese über die Grösse des Drucks. Unter Riemann's Annahme, $p = \varphi(\varrho)$, verwandelt sie sich in:

(2a) $$\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2) = \varrho_1 v_1 (v_2 - v_1).$$

Aus (1) und (2a) lassen sich v_1 und v_2 folgendermassen bestimmen:

(3) $$v_1 = \pm\sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot \frac{\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2)}{\varrho_1 - \varrho_2}}, \quad v_2 = \pm\sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2)}{\varrho_1 - \varrho_2}}.$$

Nehmen wir für $\varphi(\varrho)$ etwa das Mariotte'sche Gesetz, $\varphi(\varrho) = a^2\varrho$ an, so ist:

(3a) $$v_1 = \pm a\sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}, \quad v_2 = \pm a\sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}}.$$

Wenn wir nun hier wie auch bei unseren späteren Untersuchungen die Geschwindigkeiten als positiv bezeichnen, welche von links nach rechts gerichtet sind, so entspricht, wie wir sehen, einem Verdichtungsstoss die Bedingung: $u_1 - u_2$, oder, was dasselbe ist, $v_1 - v_2 > 0$. Hieraus sieht man: ist $\varrho_1 > \varrho_2$,

also müssen die negativen Quadratwurzeln in (3) gewählt werden;[1]) dagegen für $\varrho_1 < \varrho_2$, die positiven. Dass bei dieser Wahl entweder die beiden negativen oder die beiden positiven Quadratwurzeln zu wählen sind, und nicht etwa für v_1 die negative, für v_2 die positive, geht aus (1) hervor.

Wir gehen jetzt dazu über, für dieses in Bewegung geratene Gas die Gleichung der lebendigen Kraft aufzustellen. Um nun einen bestimmten Fall im Auge zu fassen, wollen wir annehmen, es sei $\varrho_1 > \varrho_2$; hierfür hat man also die negativen Quadratwurzeln in (3) zu wählen. Das Verhalten der auftretenden Grössen in diesem Falle stelle etwa nebenstehende Fig. 1 graphisch dar. Wählen wir nun als Zeitinterval dt die Einheit, so besitzt die Masse $\varrho_1 v_1$, bevor sie durch die Unstetigkeitsstelle hindurchströmt, die lebendige Kraft $\varrho_1 v_1 v_1^2/2$, nachher $\varrho_1 v_1 v_2^2/2$. Für diese Masse ist also der Zuwachs der lebendigen Kraft, den wir mit ΔL bezeichnen wollen:

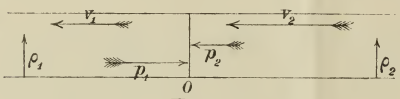


Fig. 1.

$$\Delta L = \frac{\varrho_1 v_1}{2}(v_2^2 - v_1^2). \tag{4}$$

In der That ist diese Grösse negativ; sie entspricht anstatt eines Zuwachses einer Abnahme der lebendigen Kraft. Die einzigen äusseren Kräfte, die auf das Gas wirken, sind die zwei Drucke p_1 und p_2, welche etwa zwei Stempel an den Enden der Röhre auf das Gas ausüben. Von diesen äusseren Kräften wird in der Zeiteinheit eine Arbeit, etwa A_1, geleistet:

$$A_1 = v_1 p_1 - v_2 p_2 = v_1 \varphi(\varrho_1) - v_2 \varphi(\varrho_2). \tag{5}$$

Noch eine Arbeit wird aber an der Unstetigkeitsstelle selbst geleistet; denn beim Durchgang derselben dehnt sich die Gasmasse $\varrho_1 v_1$ aus, indem die Dichte des Gases von ϱ_1 auf ϱ_2 heruntersinkt. Wenn man das Gesetz $\varphi(\varrho)$ auch für die Unstetigkeitsstelle beibehält, so muss man diese Arbeit den Molecularkräften zuschreiben, und die Ausdehnung des Gases an dieser Stelle als einen langsam vor sich gehenden Process

1) Wir machen dabei mit Riemann die Annahme, dass die Derivierte von $\varphi(\varrho)$ mit wachsendem ϱ nicht abnimmt, was in der Wirklichkeit gewiss immer der Fall ist.

betrachten, bei welchem aufgenommene Wärme in Arbeit verwandelt wird. Gerade diese Annahme wird für uns später Gegenstand eingehenderer Betrachtungen werden. Jetzt wollen wir aber die Riemann'schen Untersuchungen verfolgen, und zunächst diese Arbeit, welche bei der Ausdehnung des Gases an der Unstetigkeitsstelle geleistet wird, etwa A_2, berechnen. Dehnt sich eine Gasmasse $\varrho_1 v_1$, die in einer Röhre von dem Querschnitt eins von zwei Stempeln mit dem Abstande h unter einem Druck p eingeschlossen ist, um dh aus, so ist die geleistete Arbeit:

$$p\,dh = -p\,\varrho_1 v_1 \frac{d\varrho}{\varrho^2} = -\varrho_1 v_1 \frac{\varphi(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^2}.$$

Es ist daher:

$$A_2 = \int p\,dh = -\varrho_1 v_1 \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^2}\,d\varrho. \tag{6}$$

Die Gleichung der lebendigen Kraft lautet mithin:

$$AL = \frac{\varrho_1 v_1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = v_1\varphi(\varrho_1) - v_2\varphi(\varrho_2) - \varrho_1 v_1 \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^2}\,d\varrho. \tag{7}$$

Trägt man die Werthe für v_1 und v_2 aus (3) hier ein, so erhält man die Gleichung der lebendigen Kraft in der Form:

$$\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{\varphi(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^2} = -\frac{1}{2}\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1\varrho_2}(\varphi(\varrho_1) + \varphi(\varrho_2)). \tag{8}$$

Legen wir das Poisson'sche Gesetz zu Grunde: $\varphi(\varrho) = a^2\varrho^k$, so nimmt dieselbe folgende Gestalt an:

$$\frac{\varrho_2^{k-1} - \varrho_1^{k-1}}{k-1} = -\frac{1}{2}\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1\varrho_2}(\varrho_1^k + \varrho_2^k) \quad [k \gtrless 1]. \tag{9}$$

Für $k = 1$, also $\varphi(\varrho) = a^2\varrho$ (das Mariotte'sche Gesetz) ist:

$$\log\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) = \frac{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}{2\,\varrho_1\varrho_2}. \tag{10}$$

Führt man eine neue Variable $x = \varrho_2/\varrho_1$ in diese Gleichung (10) ein, so erhält man:

$$2\log\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - x. \tag{11}$$

Man sieht nun: wird das Mariotte'sche Gesetz angenommen, so muss, damit für diesen einfachen Fall die Gleichung der lebendigen Kraft aufrecht erhalten bleibt, für jedes beliebige x die Relation (11) bestehen, was selbstverständlich unmöglich ist. Mit anderen Worten, es sind die Riemann'schen Gleichungen unter Zugrundelegung des Mariotte'schen Gesetzes nicht in Uebereinstimmung mit dem Princip der Erhaltung der Energie. Aehnliches gilt unter Annahme des Poisson'schen Gesetzes; denn aus (9) sieht man, dass ϱ_1 und ϱ_2 nicht beliebig sein dürfen, sondern durch folgende Gleichung $(k+1)$ten Grades miteinander verknüpft sind:

$$(12) \qquad (k-1)(x^{k+1}-1)-(k+1)(x^k-x)=0,$$

wo $x=\varrho_2/\varrho_1$ gesetzt wird.

Diese Gleichung drückt nun aus, dass blos unter dieser Verbindung (12) der ϱ die Gleichung der lebendigen Kraft aufrecht erhalten bleiben kann. Die ϱ darf man aber keiner Bedingung unterwerfen; sie sind gänzlich voneinander unabhängig. Infolgedessen gelangt man zu dem Schlusse, dass unter Zugrundelegung des Gesetzes $p=a^2\varrho^k$ die Riemann'schen Gleichungen nicht in Uebereinstimmung mit dem Princip der Erhaltung der Energie bleiben.

Wenn wir zunächst nun das Gesetz $\varphi(\varrho)$ unbestimmt liessen, indem wir von der allgemeinen Gleichung der lebendigen Kraft (7) ausgingen, so könnten wir dieselbe immer als unzweifelhaft richtig betrachten, und behaupten, sie diene zur Bestimmung des Gesetzes $\varphi(\varrho)$. Wir erhielten dann eine Form für $\varphi(\varrho)$, welcher aber jedenfalls kein in der Natur vorkommendes Gas entspreche. In der That ist die Bestimmung dieser Function $\varphi(\varrho)$ sehr einfach. Denn differentirt man (8) nach ϱ_2, ersetzt man dann $\varrho_1 \sim a$, $\varphi(\varrho_1) \sim b$, $\varrho_2 \sim \varrho_1$ und $\varphi(\varrho_2) \sim \varphi$, so erhält man folgende Differentialgleichung;

$$(13) \qquad \frac{d\varphi}{d\varrho}+\frac{a\varphi}{\varrho(a-\varrho)}-\frac{ab}{\varrho(a-\varrho)}=0.$$

Zur Integration derselben wenden wir nun die Methode der Variation der Constanten an. Demnach stellt sich als erste Aufgabe die Auflösung der einfacheren Differentialgleichung dar:

$$\frac{d\varphi}{d\varrho}+\frac{a\varphi}{\varrho(a-\varrho)}=0,$$

deren Integral lautet:

$$\log \varphi - \log\left(\frac{a-\varrho}{\varrho}\right) = \text{const.}$$

Oder:

$$\varphi = C\left(\frac{a-\varrho}{\varrho}\right), \tag{14}$$

wo C die Variationsconstante bezeichnet.

Setzt man nun diesen Werth für φ in (13) ein, so ergiebt sich zur Bestimmung von C als Function von ϱ die Differentialgleichung:

$$\frac{dC}{d\varrho} - \frac{ab}{(a-\varrho)^2} = 0,$$

woraus folgt:

$$C = \frac{ab}{a-\varrho} + \text{const.}$$

Trägt man schliesslich diesen Werth für C in (14) ein, so erhält man:

$$\varphi = \left(\frac{a-\varrho}{\varrho}\right)\left(\frac{ab}{a-\varrho} + \text{const.}\right)$$

Die hier auftretende willkürliche Constante lässt sich durch die Anfangsbedingung $\varphi(a) = b$ bestimmen. In der That hat sie den Werth Null, wie man sich leicht überzeugen kann. Infolgedessen nimmt φ die ganz unzulässige Form $\varphi = ab/\varrho$ an. Es stehen somit die Riemann'schen Gleichungen für jede physikalisch mögliche Function φ mit dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft in Widerspruch.

Wir fragen nun zunächst, warum die Riemann'schen Gleichungen der Gleichung der lebendigen Kraft nicht genügen. Die Ursache liegt nicht, wie Lord Rayleigh[1]) meint, darin, dass die Grundgleichungen an sich unrichtig sind, — hieraus schliesst er, dass Verdichtungsstösse in einem Gase überhaupt nicht vorkommen können — sondern, wie wir schon angedeuet haben, in der Annahme, dass für eine Unstetigkeitsstelle das Gesetz $p = \varphi(\varrho)$ gilt. An einer solchen Stelle kann ein derartiges Gesetz, welches unter Annahme einer langsam vor sich gehenden Ausdehnung gefunden wurde, unmöglich gültig bleiben. Wir wollen also hier dieses Gesetz fallen lassen und an dessen Stelle zunächst keine bestimmte Relation zwischen p und ϱ annehmen, sondern blos die jedenfalls gültige Rela-

1) Vgl. Note 2 p. 461.

tion $p = R\varrho T$ festhalten, wo R eine Constante, T die absolute Temperatur ist. Die gesuchte Relation ist dann aus dem Princip der Erhaltung der Energie zu bestimmen, mit Hülfe der Annahme, dass Wärmeleitung und Strahlung ausgeschlossen sind.

Gehen wir nun von der kinetischen Gastheorie aus und denken uns also eine Gasmasse m oder vielmehr deren Atome, die eine gewisse kinetische Energie λ besitzen, so gilt für λ das einfache Gesetz $\lambda = mCT$, wo C die specifische Wärme bei constantem Volumen ist. Da wir nun Wärmeleitung ausgeschlossen haben, so wird diese Energie λ vermindert, wenn, wie in dem betreffenden Falle, eine Arbeit A gegen einen äusseren Druck p geleistet wird. Ganz allgemein ist nun die von einer Gasmasse m aufgenommene Wärmemenge dQ durch den Ausdruck gegeben:

$$dQ = \Delta\lambda + A.J = Cm(T_2 - T_1) + A.J = Cm\,dT + A.J,$$

wo J das mechanische Wärmeäquivalent des betreffenden Gases bezeichnet. Dehnt sich das Gas langsam aus, so gilt das Gesetz $p = R\varrho T$. Aus demselben ergiebt sich alsdann durch Differentation folgender Ausdruck für dT:

$$dT = \frac{dp}{R\varrho} - \frac{p\,d\varrho}{R\varrho_2}.$$

Wenn wir nun die lebendige Kraft der sichtbaren Bewegung vernachlässigen, so ist die geleistete Arbeit A:

$$A = p\,dv = \frac{mp}{\varrho^2}\,d\varrho.$$

Infolgedessen kann man dQ in der Form schreiben:

$$dQ = Cm\,dT - \frac{Jmp\,d\varrho}{\varrho^2} = \frac{m}{R}\left(\frac{C\,dp}{\varrho} - \frac{Cp\,d\varrho}{\varrho^2} - \frac{JRp\,d\varrho}{\varrho^2}\right).$$

Da wir nun bei der Ausdehnung unseres Gases Wärmeleitung ausgeschlossen haben (eine sogenannte adiabatische Ausdehnung), so ist $dQ = 0$; hieraus folgt:

$$\frac{C\,dp}{p} = (C + JR)\frac{d\varrho}{\varrho},$$

woraus sich durch Integration

$$p = a\varrho^{\frac{C+JR}{C}}$$

das Poisson'sche Gesetz ergiebt.

Dass unter Zugrundelegung des Poisson'schen Gesetzes für eine Unstetigkeitsstelle die Gleichung der lebendigen Kraft nicht aufrecht erhalten bleibt, haben wir schon auf p. 466 gesehen. Es gilt aber obige Ableitung des Poisson'schen Gesetzes für eine solche Stelle nicht mehr, weil bei Verdichtungsstössen erstens die Ausdehnung in der That nicht langsam, sondern plötzlich erfolgt, und infolgedessen das Glied der sichtbaren Energie nicht vernachlässigt werden darf, und zweitens das Gesetz $p = R\varrho T$ nur gültig bleibt, wenn das Gas keine heftige sichtbare Bewegung hat, zwei Fehler, die wir bei der Aufstellung der obigen Gleichung offenbar begehen mussten. Wir wollen daher für die Verdichtungsstösse zunächst umgekehrt die Relation zwischen p und ϱ aus der Gleichung der Energie ableiten. Wir gehen zu diesem Zwecke auf die mechanische Wärmetheorie zurück, indem wir die an der Unstetigkeitsstelle geleistete Arbeit auf keinen gegen die Molecularkräfte wirkenden Druck zurückzuführen versuchen, sondern einer Abnahme der sogenannten inneren lebendigen Kraft λ des betreffenden Gases zuschreiben. Hierdurch fallen die Schwierigkeiten, die bei der Aufstellung eines Ausdruckes für den Druck p auftraten, fort. Die innere Energie des Gases unterwerfen wir wieder dem einfachen Gesetz $\lambda = m C T$.

Die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$\Delta L + \Delta \lambda = A$$

lautet dann für den betreffenden Fall:

$$(15) \qquad \frac{\varrho_1 v_1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \varrho_1 v_1 C(T_2 - T_1) = p v_1 - p_2 v_2.$$

Aus dieser Gleichung (15) und den drei übrigen Bedingungsgleichungen (1) und (2):

$$(1) \quad \varrho_1 v_1 = \varrho_2 v_2, \qquad (2) \quad p_1 - p_2 = \varrho_1 v_1 (v_2 - v_1)$$

und:

$$(16) \qquad p = R\varrho T = RP$$

können wir alle auftretende Grössen als Functionen irgend welcher drei bestimmen. Sind nun diese drei beliebig gegebenen Grössen etwa P_1, ϱ_2 und T_2, so lassen sich aus den vier obigen Gleichungen alle andere Grössen als Functionen derselben bestimmen, und zwar auf folgende Weise:

Mit Hülfe (16) lässt sich (15) in die Form bringen:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = (C + R)(T_1 - T_2).$$

Ersetzt man in dieser Gleichung v_2 durch seinen Werth aus (1), so ergiebt sich:

$$(17) \qquad v_1^2 \frac{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}{2\,\varrho_2^2} = (C + R)(T_1 - T_2).$$

Aus (2) erhält man mit Hülfe (1) und (16):

$$(18) \qquad \frac{\varrho_1}{\varrho_2} v_1^2 (\varrho_1 - \varrho_2) = R(\varrho_1 T_1 - \varrho_2 T_2).$$

Dividirt man zunächst (17) durch (18), so ergibt sich:

$$\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2\,\varrho_1 \varrho_2} = K \frac{T_1 - T_2}{\varrho_1 T_1 - \varrho_2 T_2}, \quad \text{wo } K = \frac{C + R}{R} \text{ ist.}$$

Hieraus folgt:

$$(19) \qquad \varrho_1^2 T_1 - \mu\,\varrho_1 \varrho_2 T_1 = \varrho_2^2 T_2 - \mu\,\varrho_1 \varrho_2 T_2,$$

wo als Bezeichnungsweise gesesetzt wird: $\mu = 2K - 1$.

Hierdurch haben wir nun zwischen den vier Grössen ϱ_1, ϱ_2, T_1 und T_2 eine Relation (19) gewonnen, deren Bedeutuug wir zunächst etwas genauer ins Auge fassen wollen. Sei zunächst v_1 negativ, und mögen zu Anfang des Verdichtungsstosses die in dem linken Gase herrschenden Dichte und Temperatur mit ϱ_1' und T_1' resp. bezeichnet werden (vgl. Figur 2); dieselben können ja ganz beliebige Werthe haben. Nach dem ersten Zeitmoment bezeichne man die Dichte und Temperatur in dem Theile des Gases, welcher von der Störung schon durchwandert worden, mit ϱ_1 und T_1 (vgl. Figur 3). Für das Auftreten des betreffenden Verdichtungsstosses ist nun die

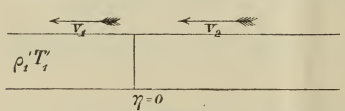


Fig. 2.

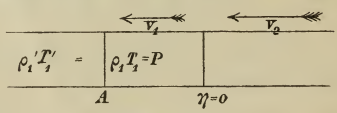


Fig. 3.

einzige zu erfüllende Bedingung die, dass das Product $\varrho_1' T_1' = P_1$ ist. Für diesen Fall, wo nämlich $\varrho_1' T_1' = P_1$ sein soll, können wir also anstatt $\varrho_1 T_1$ in die obige Relation (19) P_1 einführen, wo jetzt P_1 als eine bekannte Grösse betrachtet werden kann. Man erhält alsdann für ϱ_1 und T_1 die Werthe:

$$(20) \qquad \varrho_1 = \frac{\mu\,\varrho_2 P_1 + \varrho_2^2 T_2}{\mu\,\varrho_2 T_2 + P_1}, \qquad T_1 = \frac{P_1(\mu\,\varrho_2 T_2 + P_1)}{\mu\,\varrho_2 P_1 + \varrho_2^2 T_2}.$$

Wir sehen hieraus: wenn nur das Product $\varrho_1' T_1'$ denselben Werth P_1 hat, so wird der weitere Verlauf der Erscheinung der gleiche sein, was auch für Werthe ϱ_1' und T_1' haben mögen. Eine Dichten- resp. Temperaturunstetigkeit kann wohl an der linken Begrenzung der Störung, bei A Figur 3, auftreten; dies wird in der That der Fall sein, wenn ϱ_1' und T_1 die Werthe (20) nicht haben.

Aus (18) erhält man nach einigen Umformungen die folgenden Werthe für v_1 und v_2:

$$(21) \quad v_1 = -\sqrt{\frac{R(\mu\varrho_2 T_2 + P_1)^2}{(\mu-1)(\mu\varrho_2 P_1 + \varrho_2{}^2 T_2)}}, \quad v_2 = -\sqrt{\frac{R(\mu P_1 + \varrho_2 T_2)}{(\mu-1)\varrho_2}}.$$

Aus Gleichung (1) folgt, dass beide Wurzeln mit gleichem Zeichen genommen werden müssen. Es muss also hier auch v_2 negativ sein. Für einem Verdichtungsstoss muss nun $v_1 - v_2$ positiv sein; daher muss für den betreffenden Fall, wie man aus dem Ausdruck für $v_1 - v_2$ sieht:

$$(22) \quad v_1 - v_2 = -\sqrt{\frac{(\mu-1)R}{\varrho_2}} \frac{\varrho_2 T_2 - P_1}{\sqrt{\mu P_1 + \varrho_2 T_2}},$$

$P_1 > \varrho_2 T_2$ sein. Falls v_1 und daher auch v_2 positiv sind, müssen ϱ_1, T_1 und das Product $\varrho_2' \times T_2' = P_2$ als die gegebenen Grössen betrachtet werden. Dieser Fall kann durch Vertauschung von links mit rechts auf den betreffenden zurückgeführt werden (vgl. Schema (27)).

Wir sehen nun: „Sind allein ϱ_2, T_2 und $\varrho_1' T_1' = P_1$ beliebig gegeben, so müssen sich die übrigen Grössen ϱ_1, T_1, v_1 und v_2 durch die obigen Functionen von ϱ_2, T_2 und P_1 (20) und (21) bestimmen lassen, wobei sich nur für $P_1 > \varrho_2 T_2$ ein Verdichtungsstoss bilden kann.“ Wären dagegen noch andere als die drei Grössen ϱ_2, T_2 und $\varrho' T^r = P_1$ beliebig gegeben, so könnte ein einziger Verdichtungsstoss nicht mehr auftreten; in der That treten dann andere Zustände ein, die wir später zu untersuchen haben werden.

Den ersten Theil unserer Untersuchungen, in dem wir gesehen haben, wie der Gleichung der lebendigen Kraft in einem einfachen vorgelegten Fall zu genügen war, könnten wir jetzt abschliessen, wir wollen dieselben aber weiter verfolgen, indem wir die aus der Anschauung gewonnene Bedingung $P_1 > \varrho_2 T_2$ für das Zustandekommen des

oben betrachteten Verdichtungsstosses nach Riemann's Methode aus den Gleichungen verificiren, wobei zugleich die Auflösung der zugehörigen Discontinuität, welche für $P_1 < \varrho_2 T_2$ eintritt, näher berechnet werden kann. Zu diesem Zwecke hat man in erster Linie festzustellen, wie in der That die Auflösung eines Verdichtungsstosses geschieht. Wir betrachten den betreffenden Verdichtungsstoss nach dem ersten Augenblicke dt. Hat sich dann eine continuirliche Uebergangschicht an der vorderen oder hinteren Seite des Verdichtungsstosses gebildet, so wird derselbe durch diese Uebergangsschicht sofort aufgelöst. Es handelt sich daher blos darum, nachzuweisen, ob eine continuirliche Uebergangsschicht hier auftritt.

Zur Lösung der eben aufgestellten Frage beachten wir dass, wie schon Riemann fand, die Werthe von $r = \frac{1}{2}(f(\varrho) + u)$ mit der Geschwindigkeit $u + \sqrt{\varphi'(\varrho)}$, welche wir r nennen wollen, die Werthe von $s = \frac{1}{2}(f(\varrho) - u)$ mit der Geschwindigkeit $u - \sqrt{\varphi'(\varrho)}$, welche wir ſ nennen wollen, fortwandern. Dabei ist:

$$f(\varrho) = \int \sqrt{\varphi'(\varrho)}\, d\log\varrho.$$

An einer Unstetigkeitsstelle muss daher, wie man aus diesen Relationen ersieht, mindestens eine der beiden Grössen r und s unstetig sein.

Indem wir nun zu unserer Frage zurückkehren, denken wir uns zunächst, es habe sich in der That in dem ersten Moment eine continuirliche Uebergangsschicht an der einen oder der anderen Seite des Verdichtungsstosses oder beiderseits gebildet. Da nun die Bewegung in einer derartigen Schicht eine continuirliche ist, so gelten dafür die obigen Relationen von Riemann. Es würde daher in der r-Curve noch ein sehr jäher, aber nicht mehr discontinuirlicher Uebergang stattfinden. In der s-Curve kann aber ein solcher Uebergang nicht stattfinden, da ja die Geschwindigkeiten $ſ_1$ und $ſ_2$, mit denen ihre Ordinaten zu beiden Seiten der Uebergangsstelle fortwandern, wesentlich negativ sind, und daher ein jäher Uebergang in der s-Curve einen zweiten mit negativer Geschwindigkeit fortwandernden Verdichtungsstoss liefern würde. Nach dem ersten Moment laufen die beiden Curven auseinander; infolgedessen kann der Verlauf der s-Curve bei der Unter-

suchung des angenommenen Verdichtungsstosses (Unstetigkeitsstelle) nicht in Betracht kommen. Das Fortbestehen oder die Auflösuug des betreffenden Verdichtungsstosses kann also von dem Verlauf der r-Curve allein abhängen. Hat sich nun eine continuirliche Uebergangsschicht an Stelle der Discontinuität gebildet, so wird die Geschwindigkeit $\mathfrak{r}$, mit welcher jeder Punkt der r-Curve fortschreitet; links davon:

$$(23)\qquad \begin{cases} \mathfrak{r}_1 = v_1 + \sqrt{\varphi'(\varrho_1)} = v_1 + \sqrt{k R T_1} \\ \text{rechts davon} \\ \mathfrak{r}_2 = v_2 + \sqrt{\varphi'(\varrho_2)} = v_2 + \sqrt{k R T_2} \end{cases}$$

wobei im ersten Moment nach der Auflösung v_1, v_2, T_1, T_2 etc. noch gleich den Anfangswerthen sind.

Ist nun in (23) $\mathfrak{r}_1 > o > \mathfrak{r}_2$, wo Null die Geschwindigkeit des Verdichtungsstosses bezeichnet, so bedeutet dies: Eine continuirliche Uebergangsschicht kann sich weder an der einen noch der anderen Seite des Verdichtungsstosses bilden; d. h. der Verdichtungsstoss schreitet als solcher, ohne sich aufzulösen, fort. Dass dies der Fall ist, sieht man aus folgendem Grunde: versucht nämlich eine continuirliche Uebergangsschicht sich zu bilden, so wird jeder Punkt desselben sofort eine Geschwindigkeit $\mathfrak{r}_1$ resp. $\mathfrak{r}_2$ grösser resp. kleiner als Null erhalten; mit andern Worten es gelangt jeder Punkt der gedachten Uebergangsschicht, sobald er als solcher an der Grenze des Verdichtungsstosses aufzutreten versucht, da er vermöge der Zustandsbedingungen eine grössere resp. kleinere Geschwindigkeit als die des Verdichtungsstosses gewinnt, in den Verdichtungsstoss selber hinein; d. h. er verschwindet als solcher, vielmehr er kommt nie zum Vorschein. Ist nun dagegen $\mathfrak{r}_1 < o$ oder $\mathfrak{r}_2 > o$, so sieht man aus demselben Grunde, dass auf der einen Seite des Verdichtungsstosses eine solche continuirliche Uebergangsschicht erhalten bleibt, und sich alsdann als solche immer weiter ausbreitet, d. h. der Verdichtungsstoss löst sich sofort auf. Interressant wäre es zu untersuchen, mit welchen Geschwindigkeiten sich so eine continuirliche Uebergangsschicht ausbreitet; hierauf kommen wir bei einem später durchzuführenden Beispiel zurück.

Um nun zu entscheiden ob die betreffende Verdichtungs-

stoss (Discontinuität[1]) als solche fortbesteht oder sich sofort auflösst, ist nur die Entwickelung sowie die wirkliche Auswerthung der Ausdrücke für r_1 und r_2, die durch Formeln (23) gegeben werden, nöthig. Aus (20), (21) und (23) folgt nun:

$$r_1 = -\sqrt{\frac{R(\mu\varrho_2 T_2 + P_1)^2}{(\mu-1)(\mu\varrho_2 P_1 + \varrho_2^2 T_2)}} + \sqrt{\frac{k R P_1 (\mu\varrho_2 T_2 + P_1)}{\mu\varrho_2 P_1 + \varrho_2^2 T_2}}$$

$$r_2 = -\sqrt{\frac{R(\mu P_1 + \varrho_2 T_2)}{(\mu-1)\varrho_2}} + \sqrt{k R T}.$$

Diese Ausdrücke lassen sich in die folgenden umformen:

$$(24)\quad \begin{cases} r_1 = +\sqrt{\dfrac{k R P_1 (\mu\varrho_2 T_2 + P_1)}{\mu\varrho_2 P_1 + \varrho_2^2 T_2}} \left\{ 1 - \sqrt{\dfrac{1 + \mu\dfrac{\varrho_2 T_2}{P_1}}{1+\mu}} \right\} \\ r_2 = +\sqrt{k R T_2} \left\{ 1 - \sqrt{\dfrac{1 + \mu\dfrac{P_1}{\varrho_2 T_2}}{1+\mu}} \right\} \end{cases}$$

Hieraus sehen wir:

Ist $P_1 > \varrho_2 T_2$, so ist $r_1 > 0 > r_2$, d. h. der Verdichtungsstoss bleibt als solcher bestehen, ist dagegen $P_1 < \varrho_2 T_2$, so ist $r_1 < 0 < r_2$, d. h. der Verdichtungsstoss[1]) löst sich sofort auf, was mit dem früher gefundenen übereinstimmt."

Beispiel eines einzigen Verdichtungsstosses. „Ein Luftstrom in welchem ein beliebiger gegebener Druck herrscht, stösst gegen einen zweiten Luftstrom von der Dichte eins, welcher sich unter einem Druck von einer Atmosphäre und einer Temperatur von 0° C befindet. Welche Geschwindigkeiten müssen beide Luftströme haben, damit der Verdichtungsstoss in Ruhe bleibt?" Indem wir dem ganzen Systeme (vgl. Fig. 4) eine progressive Geschwindigkeit $(-v_2)$ von links nach rechts ertheilen, formulirt sich das Problem folgendermassen: „Ein

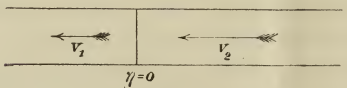


Fig. 4.

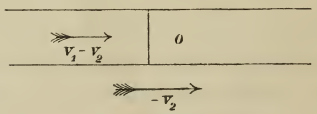


Fig. 5.

Luftstrom unter gegebenem Druck und der Geschwindigkeit

1) Für $P_1 < \varrho_2 T_2$ ist, genauer ausgedrückt, das Wort „Verdichtungsstoss" immer durch das Wort „Discontinuität" zu ersetzen. Der Verdichtungsstoss ist in der That eine festbestehende Discontinuität.

$v_1 - v_2$ (man vgl. Fig. 5) stösst gegen einen zweiten sich in Ruhe befindenden Luftstrom von der Dichte Eins, welcher sich unter einem Druck von einer Atmosphäre und einer Temperatur von 0° C befindet. Gesucht werden die Zustandsbedingungen, unter welchen beim Zusammenstosse der beiden Ströme ein einziger Verdichtungsstoss auftritt. Von besonderem Interesse wird jedoch für uns der Werth von $(-v_2)$ sein, mit welcher sich der Verdichtungsstoss in die in Ruhe gedachte Luft hineinpflanzt.

Gegeben sind:

$$\varrho_2 = 1, T_2 = \frac{273^0\,\mathrm{C}}{273^0\,\mathrm{C}} = 1\,, \quad P_1 = m P_0$$

wo P_0 einem Druck von einer Atmosphäre entspricht, und m eine beliebige Constante grösser als Eins ist. Unserer Bezeichnungsweise zufolge ist ferner:

$$\mu = 2K - 1 \quad K = \frac{C + R}{R}$$

wo C die specifische Wärme bei constantem Volumen, $C + R$ bei constantem Druck bezeichnet. Den Ausdruck:

$$\frac{C + R}{C}$$

pflegt man ferner mit k zu bezeichnen. Wenn wir nun als Werthe für diese Constanten die heutzutage wahrscheinlichsten zu Grunde legen, so ist für Luft $k = 1{,}4$; daher $\mu = 6$.

Aus den Formeln (20) und (21) ergeben sich dann für ϱ_1, T_1, $v_1 - v_2$, und $-v_2$ die gesuchten numerischen Werthe, sobald man dem Druck p_1 oder P_1, einen bestimmten Werth ertheilt. Wir wollen hier diese numerische Rechnung für einen bestimmten Werth von P_1 durchführen und zwar für $P_1 = 2P_0$. Hierfür erhält man ohne Weiteres aus Formel (20) für ϱ_1 und T_1 die Werthe:

$$\varrho_1 = 1{,}63 \quad T_1 = \frac{273^0 + 63^0}{273^0},$$

einer Temperatur von 63° C entsprechend. Um numerische Werthe für v_1 und v_2 zu gewinnen, hat man zuerst ein Geschwindigkeitsmass einzuführen; als Einheit für dieselben möge nun die Schallgeschwindigkeit u_0, einer Temperatur von 0° C entsprechend, gewählt werden. Nehmen wir mit Riemann

$$u_0 = \sqrt{\varphi(\varrho)} = \sqrt{k a^2 \varrho_0^{k-1}} = \sqrt{k a^2 \frac{\varrho_0^k}{\varrho_0}} = \sqrt{k \frac{p_0}{\varrho_0}} = \sqrt{k R T_0}$$

an, so lassen sich v_1 und v_2 aus Formel (21) folgendermassen bestimmen:

$$v_1 = -\sqrt{\frac{R(6P_0+2P_0)^2}{5(12P_0+P_0)}} = -\sqrt{\frac{kRT_0 8^2}{5.13.k}} = -\frac{8u_0}{\sqrt{7.13}} = -0{,}84u_0$$

$$v_2 = -\sqrt{\frac{R(12P_0+P_0)}{5}} = -\sqrt{\frac{kRT_0.13}{5.1.4}} = -\sqrt{\frac{13}{7}}u_0 = -1{,}36u_0$$

woraus folgt:

$$v_1 - v_2 = 0{,}52\,u_0\,.$$

Für $P_1 < P_0$, einer sich auflösenden Discontinuität entsprechend, können wir ebenfalls die eintretenden Zustände genauer untersuchen. Wir wollen, wie oben für $P_1 > P_0$, auch hier die numerische Rechnung für einen bestimmten Werth von P_1, etwa $P_1 = \frac{1}{2}P_0$, durchführen. Man erhält aus (20) für ϱ_1 und T_1 die Werthe:

$$\varrho_1 = 0{,}615 \qquad T_1 = \frac{273^0 - 51{,}20^0}{273^0},$$

eine Temperatur von $-50{,}20^0$ C entsprechend. Aus (21) ergeben sich für v_1 und v_2 folgende Werthe:

$$v_1 = -\sqrt{\frac{R(6P_0+\frac{1}{2}P_0)^2}{5(6.\frac{1}{2}P_0+P_0)}} = -\sqrt{\frac{kRT_0(6\frac{1}{2})^2}{5.4k}} = -\frac{13u_0}{2\sqrt{28}} = -1{,}228\,u_0$$

$$v_2 = -\sqrt{\frac{R(6.\frac{1}{2}P_0+P_0)}{5}} = -\sqrt{\frac{kRT_0.4}{5.k}} = -\sqrt{\frac{4}{7}}u_0 = -0{,}756\,u_0.$$

In diesem Falle, $P_1 < P_0$, können die Werthe von $(-v_2)$, mit welchen die Discontinuität fortwandern würde, wenn sich dieselbe nicht sofort auflöste, uns nicht mehr interessieren, vielmehr werden jetzt an deren Stelle die Geschwindigkeiten r_1 und r_2 in den Vordergrund des Interesses treten, mit welchen sich die Punkte der r-Curve der continuirlichen Uebergangsschicht, die das Auflösen derselben herbeibringt, fortpflanzen; sie ergeben also, wenn auch nur qualitativ, die Geschwindigkeiten, mit welchen die sich auflösende Discontinuität sich in die ruhende Luft ausbreitet. Infolgedessen wollen wir für $P_1 < P_0$ anstatt die Werthe von v_2 die Geschwindigkeiten r_1 und r_2 etwas genauer ins Auge fassen. Es ist nun nach (24):

$$r_1 = \sqrt{\frac{kRP_1(\mu\varrho_2 T_2 + P_1)}{\mu\varrho_2 P_1 + \varrho_2^2 T_2}}\left\{1 - \sqrt{\frac{1+\mu\dfrac{\varrho_2 T_2}{P_1}}{1+\mu}}\right\}$$

$$r_2 = \sqrt{k R T_2}\left\{1 - \sqrt{\frac{1 + \mu \frac{P_1}{\varrho_2 T_2}}{1 + \mu}}\right\}$$

Indem wir r_1 und r_2 für $P_1 = \frac{1}{2} P_0$ auswerthen, erhalten wir:

$$r_1 = \sqrt{\frac{k R \frac{1}{2} P_0 (6 P_0 + \frac{1}{2} P_0)}{3 P_0 + P_0}}\left\{1 - \sqrt{\frac{13}{7}}\right\} = \frac{\sqrt{13}}{4} u_0 - \frac{13}{4\sqrt{7}} u_0 = -0{,}327\, u_0$$

$$r_2 = \sqrt{k R T_0}\left\{1 - \sqrt{\frac{4}{7}}\right\} = 0{,}244\, u_0 .$$

Oder wenn wir r_1 und r_2 auf die ruhende Luft (das rechte Gas) beziehen, und mit r_1' und r_2' resp. bezeichnen:

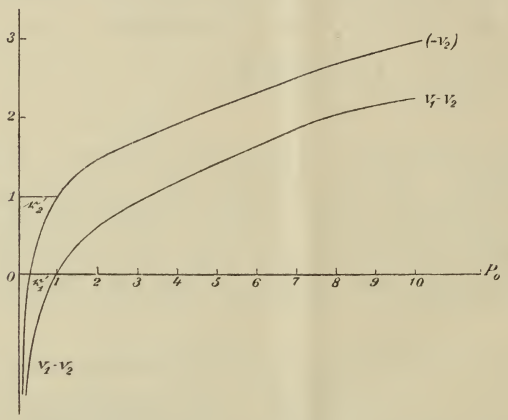
$$r_1' = r_1 - v_2 = 0{,}429\, u_0$$
$$r_2' = r_2 - v_2 = u_0 .$$

Um eine Uebersicht zu gewinnen, wollen wir zunächst P_1 der Reihe nach verschiedene Werthe ertheilen und analog den obigen zwei Fällen, je nachdem $P_1 >$ oder $<$ als P_0 ist, die entsprechenden Werthe von ϱ_1, T_1, $v_1 - v_2$, v_2, r_1 und r_2 berechnen. Dieselben fassen wir alsdann in folgender Tabelle zusammen:

$\varrho_2 = 1$ $\qquad T = \frac{273^0 + 0^0}{273^0}$, einer Temperatur von 0^0 C. entsprechend

P_1	ϱ_1	Temperatur im linken Luftstrom ^{0}C.	$v_1 - v_2$ in u_0	r_1' in u_0	r_2' in u_0	
0,1	0,262	− 168,9	− 1,34	− 0,728	1	Die Discontinuität löst sich auf.
0,21	0,362	− 114,8	− 1,00	− 0,233	1	
0,3	0,445	− 88,9	− 0,79	0,032	1	
0,5	0,615	− 52,2	− 0,47	0,429	1	
0,7	0,776	− 22,9	− 0,25	0,701	1	
0,9	0,928	− 8,1	− 0,07	0,910	1	
				$(-v_2)$ in u_0		
1,1	1,070	7,65	0,07	1,04		Der Verdichtungsstoss bleibt bestehen
1,5	1,333	34,13	0,30	1,20		
2,0	1,625	63,00	0,52	1,36		
3,0	2,111	114,93	0,87	1,65		
3,47	2,305	138,14	1,00	1,77		
4,0	2,500	163,80	1,13	1,89		
5,0	2,818	211,45	1,36	2,11		
10,0	3,813	443,10	2,18	2,95		

Ueber die in den zwei letzten Colonnen dieser Tabelle vorkommenden Grössen sei noch folgendes bemerkt: Um eine bessere Uebersicht derselben zu gewinnen, tragen wir ihre hier ausgerechneten Werthe, nämlich, $v_1 - v_2$ $(-v_2)$, r_1 und r_2 resp. als Punkte einer Curve, deren Abscisse P ist, auf; wir erhalten dann das in der nebenstehenden Zeichnung dargestellte Curvensystem. Vor allen merkt man nun, dass für P_1 nahe gleich P_0, was einer kleinen Geschwindigkeit des anstossenden Luftstromes relativ gegen die in Ruhe gedachte Luft entspricht, $-v_2$ nahe gleich der Schallgeschwindigkeit wird, ein Resultat, welches vorauszusehen war. Ferner, mit abresp. zunehmendem P_1 wächst gleichzeitig



$$|v_1 - v_2|\ ^1),$$

bis sie schliesslich die Schallgeschwindigkeit u_0 erreicht; das entsprechende P_1 lässt sich, wie man sich mit Hülfe der Formel (21) leicht überzeugen kann, durch die quadratische Gleichung bestimmen:

$$5\,R\,(P_1 - P_0)^2 = (6\,P_1 + P_0)\,u_0{}^2$$

oder mit numerischen Coefficienten geschrieben und geordnet:

$$50\,P_1{}^2 - 180\,P_1 + 36 = 0$$

deren zwei Wurzel 3,47 und 0,21 sind. Für $\varrho_1 > \varrho_2$ ist offenbar 3,47 die zu wählende Quadratwurzel, für $\varrho_1 < \varrho_2$ 0,21. Solange nun $0{,}21\,P_0 < P_1 < 3{,}47\,P_0$, ist also $|v_1 - v_2|$ kleiner als die Schallgeschwindigkeit. Sobald aber $P_1 > 3{,}47\,P_0$ oder $P_1 < 0{,}21\,P_0$, tritt der abnorme Fall ein, dass $|v_1 - v_2|$ grösser als die Schallgeschwindigkeit wird.

1) Die verticalen Striche sollen bedeuten, dass der absolute Betrag der betreffenden Grösse zu nehmen ist.

Auftreten eines einzigen Verdichtungsstosses bei der absoluten Bewegung. Dieser Fall unterscheidet sich von dem der relativen Bewegung bloss dadurch, dass die absolute Geschwindigkeit des Verdichtungsstosses selbst, sowie selbstverständlich die absoluten Geschwindigkeiten der beiden strömenden Gase, in unseren Bedingungsformeln auftreten; bis auf diesen Unterschied sind in Folge dessen die Betrachtungen zur Aufstellung der Formeln, wie ebenfalls die Bedingungsformeln selbst ganz dieselben wie dort. Um nun einen bestimmten Fall vor Auge zu haben, wollen wir hier wie vorher bei der relativen Bewegung uns zuerst auf den Fall beschränken, das v_1 und v_2 negativ sind, dass also der Verdichtungsstoss sich relativ gegen jedes der Gase nach rechts bewegt, was wir einen vorwärtslaufenden Verdichtungsstoss nennen wollen. Der andere Fall, wo v_1 und v_2 positiv sind, weshalb der Verdichtungsstoss sich relativ gegen beide Gase nach links bewegt, was wir als einen rückwärtslaufenden Verdichtungsstoss bezeichnen wollen, lässt sich durch Bedingungsformeln, die durch eine Substitution in den für den betreffenden Fall aufzustellenden Bedingungsformeln gewonnen werden, darstellen. Wie sich in der That derselbe auf den betreffenden Fall zurückführen lässt, werden wir später sehen (vgl. p. 481).

Bezeichnet nun η die absolute Geschwindigkeit des vorwärtslaufenden Verdichtungsstosses, u_1 bezw. u_2 die absolute Geschwindigkeit des Gases links bezw. rechts von demselben (man vergl. Fig. 6), so ist:

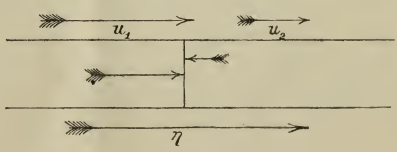


Fig. 6.

$$u_1 = \eta + v_1\,, \quad u_2 = \eta + v_2 \tag{25}$$

wo v_1 und v_2, da sie sich auf die relative Bewegung des Gases in Bezug auf den Verdichtungsstoss beziehen, wie ebenso ϱ_1 und T_1, dieselben Werthe haben als vorher bei der relativen Bewegung (man vgl. Formeln (20) und (21)), wie man auch durch Aufstellung der vier Grundgleichungen für die betreffende Unstetigkeitsstelle nach einigen Umformungen derselben sich leicht überzeugen kann. [1]) Ersetzt man also ϱ_1 und T_1 und v_1

1) Für die betreffende Unstetigkeitsstelle lauten die vier Grundgleichungen folgendermassen:

und v_2 durch diese Werthe (20) und (21), so erhält man:

$$(26) \qquad \varrho_1 = \frac{\mu\,\varrho_2 P_1 + \varrho_2^2 T_2}{\mu\,\varrho_2 T_2 + P_1}, \qquad T_1 = \frac{P_1(\mu\,\varrho_2 T_2 + P_1)}{\mu\,\varrho_2 P_1 + \varrho_2^2 T_2}.$$

$$(26) \quad \eta = u_1 + \sqrt{\frac{R(\mu\,\varrho_2 T_2 + P_1)^2}{(\mu - 1)(\mu\,\varrho_2 P_1 + \varrho_2^2 T_2)}} = u_2 + \sqrt{\frac{R(\mu P_1 + \varrho_2 T_2)}{(\mu - 1)\varrho_2}}.$$

Da nun eine neue Grösse η in unsere Formeln (26) eingetreten ist, so ist eine grössere Willkür möglich als in dem vorigen Falle der relativen Bewegung, wo blos drei Grössen beliebig sein durften. Hier dürfen jetzt je vier der auftretenden Grössen beliebig gegeben sein. Es werden jedenfalls als solche zu bezeichnen sein ϱ_2, T_2 und u_2, Grössen, die sich auf den Theil des Gases beziehen, welcher zur Zeit noch nicht von der Störung beeinflusst wurde. In dem Theile, der theilweise von der Störung schon durchwandert ist, nämlich, dem mit dem Index 1 (vgl. Fig. 7), darf höchstens blos eine Grösse, P_1 = constant, dem Auftreten des einzigen vorwärtslaufenden Verdichtungsstosses entsprechend, als bekannt an-

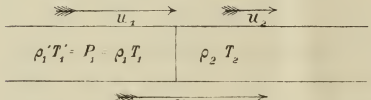


Fig. 7.

(a) $$\varrho_1 v_1 \left(\frac{u_2^2 - u_1^2}{2}\right) + \varrho_1 u_1 C(T_2 - T_1) = p_1 u_1 - p_2 u_2;$$

(b) $\varrho_1 v_1 = \varrho_2 v_2$; (c) $p_1 - p_2 = (u_2 - u_1)\varrho_1 v_1$; (d) $p = RP$.

Hieraus lassen sich mit Hülfe der Relationen (25) die zwei folgenden Gleichungen (e) und (f) ableiten:

Aus (a), (c) und (d) ergiebt sich:

$$\varrho_1 v_1 \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}\right) + \varrho_1 v_1 \eta(v_2 - v_1) + \varrho_1 v_1 C(T_2 - T_1) = p_1 v_1 - p_2 v_2 - \eta(p_1 - p_2)$$
$$= R\varrho_1 v_1 (T_1 - T_2) - \varrho_1 v_1 \eta(v_2 - v_1)$$

woraus folgt:

$$(\varepsilon) \qquad \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = (C + R)(T_1 - T_2).$$

Aus (b), (c) und (d):

$$(f) \qquad (v_2 - v_1)\varrho_1 v_1 = \varrho_1 / \varrho_2 (\varrho_1 - \varrho_2) v_1^2 = R(\varrho_1 T_1 - \varrho_2 T_2).$$

Diese Gleichungen (e) und (f) sind nun nichts anders als (17) und (18); in Folge dessen ergeben sich aus denselben für ϱ_1 und T_1 sowie für v_1 und v_2, als Functionen von ϱ_2, T_2 und P_1 dieselben Werthe als die dort angegebenen (vgl. Formeln (20) und (21)). Hierdurch ist die Richtigkeit der auf indirectem Wege gewonnenen Werthe für η auf directem Wege nachgewiesen.

genommen werden; dieselbe betrachten wir als unsere vierte beliebig gegebene Grösse. In dem Theile des Gases, der links von der Ausgangsstelle des Verdichtungsstosses liegt, und in welchem wir Dichte und Temperatur mit ϱ_1' und T_1' resp. bezeichnen wollen, sind ϱ_1' und T_1' ganz beliebige Functionen von x und t — mit der einzigen Beschränkung $\varrho_1' T_1' = P_1$ —; in der That gilt hier in Bezug auf ϱ_1' und T_1' ganz dasselbe, was früher bei der relativen Bewegung in Bezug auf diese Grössen gegolten hat (vgl. p. 471). Wir sind also hierdurch zu dem Resultate gelangt:

„Sind ϱ_2, T_2, u_2 und $\varrho_1' T_1' = P_1$ beliebig gegeben, so sind die übrigen Grössen ϱ_1, T_1, u_1 und η durch die obigen Functionen (26) von ϱ_2, T_2, u_2 und P_1 bestimmt; hierdurch ist das Auftreten eines einzigen vorwärtslaufenden Verdichtungsstosses bedingt."

Bevor wir nun zu dem Falle der Auflösung einer Discontinuität in zwei Verdichtungsstösse übergehen, wollen wir der Vollständigkeit halber die Bedingungsgleichungen für das Aufreten eines *rückwärtslaufenden Verdichtungsstosses*[1]) aufstellen. Die gesuchten Relationen kann man nun am leichsten aus den für einen vorwärtslaufenden Verdichtungsstoss aufgestellten Bestimmungsgleichungen gewinnen, indem man für den Augenblick den mit der Geschwindigkeit ζ rückwärtslaufenden Verdichtungsstoss (vgl. Figuren 8 und 9) durch eine Drehung der

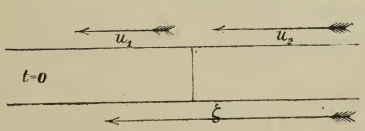


Fig. 8.

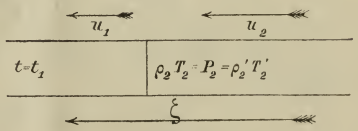


Fig. 9.

Coordinatenbeziehungen um 180° in einen vorwärtslaufenden Verdichtungsstoss verwandelt, alsdann die in den Bedingungsformeln für einen vorwärtslaufenden Verdichtungsstoss auftretenden Grössen der dieser Drehung des Coordinatensystems entsprechenden Substitution:

$$(27) \qquad \begin{pmatrix} \eta & u_1 & u_2 & \varrho_1 & \varrho_2 & T_1 & T_2 & P_1 \\ -\zeta & -u_2 & -u_1 & \varrho_2 & \varrho_1 & T_2 & T_1 & P_2 \end{pmatrix}$$

unterwirft. Es lauten dann die gesuchten Relationen:

1) Vgl. die Definition desselben auf p. 479.

$$(28)\begin{cases} \varrho_2 = \dfrac{\mu\,\varrho_1 P_2 + \varrho_1^{\,2} T_1}{\mu\,\varrho_1 T_1 + P_2} \qquad T_2 = \dfrac{P_2(\mu\,\varrho_1 T_1 + P_2)}{\mu\,\varrho_1 P_2 + \varrho_1^{\,2} T_1} \\ -\zeta = -u_2 + \sqrt{\dfrac{R(\mu\,\varrho_1 T_1 + P_2)^2}{(\mu-1)(\mu\,\varrho_1 P_2 + \varrho_1^{\,2} T_1)}} = -u_1 + \sqrt{\dfrac{R(\mu P_2 + \varrho_1 T_1)}{(\mu-1)\,\varrho_1}} \end{cases}$$

Was nun ϱ_2' und T'_2 als Functionen von x und t betrifft, so gilt für sie gerade das entsprechende was früher für ϱ_1' und T_1' bei den vorwärtslaufenden Verdichtungsstoss gegolten hat.[1]) Wir gelangen also hierdurch zu dem Resultate:

„Sind allein ϱ_1, T_1, u_1 und $\varrho_2'\,T_2' = P_2$ beliebig gegeben, so lassen sich bei dem rückwärtslaufenden Verdichtungsstosse die übrigen Grössen ϱ_2, T_2, u_2 und ζ durch die Functionen (28) von ϱ_1, T_1, u_1 und P_2 bestimmen."

Dem Falle $\varrho_1 T_1 = \varrho_2 T_2$ entspricht selbstverständlich keine Discontinuität im Gase. Man könnte also einen solchen Zustand als Grenzfall eines vorwärts = resp. rückwätslaufenden Verdichtungsstosses, d. h. als eine fortschreitende Schallwelle auffassen, wenn man den zugehörigen u_1 und u_2 passende Werthe ertheilt. In dem einen sowol wie in dem anderen Falle ergibt sich dann aus dem Ausdrucke für ϱ_1/ϱ_2 (vgl. (26) und (28)):

$$\varrho_1 = \varrho_2.$$

Als Grenzfall eines vorwärtslaufenden Verdichtungsstosses nimmt η die Form an:

$$\eta = u_1 + \sqrt{k\,R\,T_2} = u_2 + \sqrt{k\,R\,T_2}.$$

Als Grenzfall eines rückwärtslaufenden Verdichtungsstosses ζ:

$$\zeta = u_1 - \sqrt{k\,R\,T_1} = u_2 - \sqrt{k\,R\,T_1}.$$

Hieraus sieht man, dass $\varrho_1 T_1 = \varrho_2 T_2$ und $u_1 = u_2$ die Bedingungen für das Auftreten einer einzigen Schallwelle sind, deren relative Geschwindigkeit durch $\sqrt{k\,R\,T} = u_0$ d. h. der Schallgeschwindigkeit, gegeben wird.

Den Grenzfall $\varrho_1 T_1 = \varrho_2 T_2$, $u_1 \gtrless u_2$, da derselbe mit den Formeln für eine einzige Schallwelle nicht in Einklang steht, hat man als Grenzfall des allgemeinen zu untersuchenden Falles (vgl. p. 490) zu betrachten.

Man könnte vielleicht meinen, *der Fall* $P_1 \gtrless P_2$, $u_1 = u_2$,

1) Vgl. p. 471 und 481.

der jedenfalls eine Discontinuität im Gase darstellt, würde auch einen Verdichtungsstoss liefern, der sich nach den obigen Formeln, den Bedingungsformeln für einen einzigen Verdichtungsstoss, (vgl. (26) und (28)) untersuchen liesse. Dass indess dieser Fall nicht in Uebereinstimmung mit der oben aufgestellten Formel für $u_1 - u_2$ gebracht werden kann, sieht man aber sofort. Dies hat seinen Grund darin, dass die Kraftgleichung:

$$p_1 - p_2 = (u_2 - u_1)\,\varrho_1\, v_1 = 0$$

nicht mehr gilt. Da nun diese eine Bedingung für das Auftreten eines einzigen Verdichtungsstosses nie erfüllt wird, so kann hier kein einziger fortschreitender Verdichtungsstoss auftreten. Dass in der That die betreffende Discontinuität sich nicht in zwei Verdichtungsstösse, sondern in eine continuirliche Bewegung auflöst, werden wir später (p. 34) sehen.

Auflösung einer Discontinuität in zwei Verdichtungsstösse.

Im allgemeinen wird beim Zusammenstoss zweier Gase sich nicht ein einziger Verdichtungsstoss bilden, sondern es werden zwei auseinanderlaufende auftreten. Der einzige fortschreitende Verdichtungsstoss, welcher offenbar als specieller Fall des allgemeinen betrachtet werden kann, wurde ja dadurch ausgezeichnet, dass nach dem Zusammenstoss der Gase ihm die Bedingung auferlegt wurde: der Druck soll an nur einer Stelle unstetig sein. Dementsprechend suchten wir dann die Relationen, welche unter den auftretenden Grössen bestehen mussten. Für den allgemeinen Fall haben wir aber diese Bedingung, eines nur an einer einzigen Stelle unstetigen Druckes fallen zu lassen, und denselben an zwei den zwei Verdichtungsstössen entsprechenden Stellen als unstetig anzunehmen. Hier treten ϱ_1, T_1, u_1, ϱ_2, T_2' und u_2, welche zu Anfang des Zusammenstosses im Gase herrschten (vgl. Fig. 10), selbstverständlich als ganz beliebig gegebene Grössen auf. Infolgedessen stellt sich hier die Frage, wie die verschiedenen

Fig. 10.

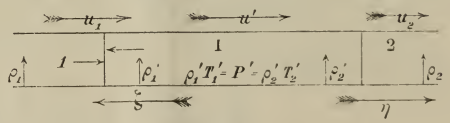


Fig. 11.

Grössen, Dichte, Temperatur und Geschwindigkeit, in dem zwischen den zwei auseinander laufenden Verdichtungsstössen liegenden Gebiet I (vgl. Fig. 11) sich verhalten. — Alle Grössen, die sich auf dieses Gebiet beziehen, mögen dadurch ausgezeichnet werden, dass ihnen ein Accent hinzugefügt wird. — Zu diesem Zwecke haben wir blos die für den einen mit der Geschwindigkeit ζ rückwärtslaufenden Verdichtungsstoss uns schon bekannten Bedingungsgleichungen (vgl. (28)) zwischen den Grössen des Gebietes I und den des Gebietes 1, und sodann die für den anderen mit der Geschwindigkeit η vorwärtslaufenden Verdichtungsstoss geltenden Relationen (vgl. (26)) zwischen den Grössen desselben Gebietes I und den des Gebietes 2 aufzustellen. Hierbei haben wir uns auf den Fall beschränkt, dass die beiden Gase von links nach rechts sich fortbewegen — der Fall, dass die Gase von rechts nach links, wie ebenfalls der Fall, dass die Gase nach entgegengesetzten Richtungen sich fortbewegen, lässt sich durch eine einfache Coordinatentransformation auf den betreffenden Fall zurückführen; — und für diesen Fall ist der η Verdichtungsstoss als ein vorwärtslaufender, der ζ als ein rückwärtslaufender Verdichtungsstoss zu bezeichnen. Wir gehen zunächst zur Aufstellung der Bedingungsformeln für diesen betreffenden Fall über. Es ergeben sich aus Formeln (26) für den η Verdichtungsstoss die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\varrho_2' = \frac{\mu\,\varrho_2 P' + \varrho_2^2 T_2}{\mu\,\varrho_2 T_2 + P'} \qquad T_2' = \frac{P'(\mu\,\varrho_2 T_2 + P')}{\mu\,\varrho_2 P' + \varrho_2^2 T_2}$$

$$\eta = u' + \sqrt{\frac{R(\mu\,\varrho_2 T_2 + P')^2}{(\mu-1)(\mu\,\varrho_2 P' + \varrho_2^2 T_2)}} = u_2 + \sqrt{\frac{R(\mu P' + \varrho_2 T_2)}{(\mu-1)\,\varrho_2}}$$

Diese Relationen werden aus den eben erwähnten Bedingungsgleichungen dadurch erhalten, dass man die dort auftretenden Grössen der Substitution unterwirft:

$$\begin{pmatrix} \eta & u_1 & u_2 & \varrho_1 & \varrho_2 & T_1 & T_2 & P_1 \\ \eta & u' & u_2 & \varrho_2' & \varrho_2 & T_2' & T_2 & P' \end{pmatrix}.$$

Die Bedingungsgleichungen für den rückwärtslaufenden Verdichtungsstoss gewinnt man aus den Formeln (28) mit Hülfe der Substitution:

$$\begin{pmatrix} \zeta & u_1 & u_2 & \varrho_1 & \varrho_2 & T_1 & T_2 & P_2 \\ \zeta & u_1 & u' & \varrho_1 & \varrho_1' & T_1 & T_1' & P' \end{pmatrix}$$

Dieselben lauten:

$$\varrho_1' = \frac{\mu\,\varrho_1\,P' + \varrho_1^2\,T_1}{\mu\,\varrho_1\,T_1 + P_1'} \qquad T_1' = \frac{P'(\mu\,\varrho_1\,T_1 + P')}{\mu\,\varrho_1\,P' + \varrho_1^2\,T_1}$$

$$-\zeta = -u' + \sqrt{\frac{R(\mu\,\varrho_1\,T_1 + P')^2}{(\mu-1)(\mu\,\varrho_1 P' + \varrho_1^2 T_1)}} = -u_1 + \sqrt{\frac{R(\mu\,P' + \varrho_1\,T_1)}{(\mu-1)\,\varrho_1}}$$

Bei der Auflösung der betreffenden Discontinuität in zwei Verdichtungsstösse gibt es also, wie wir sehen, acht Relationen unter den Grössen der Gebiete I und 1 und 2, die erfüllt werden müssen. Infolgedessen lassen sich je acht der 12 auftretenden Grössen als Functionen der übrigen sechs ganz beliebig zuwählenden Grössen bestimmen. Selbstverständlich sind ϱ_1, ϱ_2, u_1, u_2, T_1 und T_2 die beliebig gegebenen Grössen. Als Functionen derselben lassen sich die übrigen folgendermassen bestimmen:

$$\varrho_1' = \frac{\mu\,\varrho_1\,P' + \varrho_1^2\,T_1}{\mu\,\varrho_1\,T_1 + P'} \qquad T_1' = \frac{P'(\mu\,\varrho_1\,T_1 + P')}{\mu\,\varrho_1\,P' + \varrho_1^2\,T_1}$$

$$\varrho_2' = \frac{\mu\,\varrho_2\,P' + \varrho_2^2\,T_2}{\mu\,\varrho_2\,T_2 + P'} \qquad T_2' = \frac{P'(\mu\,\varrho_2\,T_2 + P')}{\mu\,\varrho_2\,P' + \varrho_2^2\,T_2}$$

$$u' = u_1 - \sqrt{\frac{R(\mu-1)}{\mu\,\varrho_1 P' + \varrho_1^2 T_1}}\cdot(P' - \varrho_1\,T_1') = u_2 + \sqrt{\frac{R(\mu-1)}{\mu\,\varrho_2 P' + \varrho_2^2 T_2}}\,(P' - \varrho_2\,T_2')$$

$$\eta = u_2 + \sqrt{\frac{R(\mu\,P' + \varrho_2\,T_2)}{(\mu-1)\,\varrho_2}} \qquad \zeta = u_1 - \sqrt{\frac{R(\mu\,P' + \varrho_1\,T_1)}{(\mu-1)\,\varrho_1}}$$

Hier ist jede Unbekannte als Function der sechs gegebenen Grössen und der zu bestimmenden Unbekannten P' durch einen sehr einfachen Ausdruck gegeben. Zur Bestimmung von P' selbst dient die zweifache Relation für u', woraus die folgende Bestimmungsgleichung folgt:

$$(30)\quad u_1 - u_2 = \sqrt{R(\mu-1)}\left\{\frac{P' - \varrho_2\,T_2}{\sqrt{\mu\,\varrho_2 P' + \varrho_2^2 T_2}} + \frac{P' - \varrho_1\,T_1}{\sqrt{\mu\,\varrho_1 P' + \varrho_1^2 T_1}}\right\}$$

Für den betreffenden Fall sind die hier vorkommenden Quadratwnrzelzeichen positiv zu nehmen. Demnach ist $u_1 - u_2 / \sqrt{R(u-1)}$ positiv. Mit diesen Festsetzungen ist es nun leicht, zu beweisen, dass diese Relation (30) blos eine einzige positive Wurzel fur P' liefert; dieselbe ist selbstverständlich die gesuchte Lösung, und zwar ist letztere hierdurch als eine eindeutige Lösung zu bezeichnen. Zum Beweis hiervon führen wir zuerst folgende Bezeichnungen in (30) ein:

$$P' = x; \quad \varrho_2 T_2 = a_2; \quad \frac{\varrho_2 T_2}{\mu} = b; \quad \varrho_1 T_1 = a_1; \quad \frac{\varrho_1 T_1}{\mu} = b_1,$$

wodurch diese Relation sich folgendermassen schreiben lässt:

$$(31) \qquad \frac{u_1 - u_2}{\sqrt{R(\mu - 1)}} = \frac{x - a_2}{\sqrt{\mu \varrho_2}\sqrt{x + b_2}} + \frac{x - a_1}{\sqrt{\mu \varrho_1}\sqrt{x + b_1}}$$

Die Ausdrücke rechter Hand $x - a_2/\sqrt{x + a_2}$ und $x - a_1\sqrt{x + b_1}$ fassen wir zunächst etwas genauer ins Auge. Zu diesem Zwecke differentiren wir dieselben nach x und erhalten:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x - a_i}{\sqrt{x + b_i}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x + b_i}} - \frac{x - a}{2\sqrt{(x + b_i)^3}} = \frac{x + a_i + 2b_i}{2\sqrt{(x + b_i)^3}} \quad [i = 1, 2]$$

$x + a_i + 2b_i/2\sqrt{x + b_i)^3}$ ist nun eine positive Grösse für jedes positive x. Hieraus folgt, dass der Ausdruck $x - a_i/\sqrt{x + b_i}$ mit zunehmendem x wächst. Für $P' = 0$ ist aber $x - a_i/\sqrt{x + b_i}$ negativ, für $P' = \infty$ positiv; da nun zwischen diesen Werthen der Ausdruck $x - a_i/\sqrt{x + a_i}$ fortwährend wächst, so liegt in diesem Intervall blos ein dieser Relation (30) genügender Werth für P'. Selbstverständlich bleibt dieser Beweis allein unter den obigen Festsetzungen über die Wahl der in (30) resp. (31) auftretenden Quadratwurzelzeichen gültig.

Was die wirkliche Auflösung der Relation (30) betrifft, so führt dieselbe auf eine höchst complicirte Gleichung 6. Grades in P', die in allgemeinem Falle algebraisch nicht aufzulösen ist; sogar unter Zugrundelegung der allereinfachsten Werthe für die beliebig zu wählenden Grössen bietet die Auflösung derselben grosse numerische Schwierigkeiten dar. Wir wollen daher die wirkliche Auflösung dieser Gleichung blos für einen einzigen bestimmten Fall suchen.

Beispiel für die Auflösung einer Discontinutiät in zwei Verdichtungsstössen. „Das rechte Gas, etwa Luft, habe die Dichte Eins, die Temperatur 0° C., daher den Druck von einer Atmosphäre, und es befinde sich in Ruhe; das linke Gas, ebenfalls Luft, habe die Dichte $^{13}/_{7}$, die Temperatur 21° C., daher den Druck von zwei Atmosphären, und es stosse mit der Geschwindigkeit

$$5\,u_0\sqrt{\frac{3}{2.7.13}} = 0{,}642\,u_0$$

gegen die rechts liegende ruhende Luft. Gesucht werden die

Zustände in dem nach dem ersten Augenblick zwischen den zwei auseinanderlaufenden Verdichtungsstössen liegenden Luftstrom.“ Die gesuchten Grössen werden ohne weiteres aus dem Formelsystem (29) zu erhalten sein, nachdem der Werth von P' aus (30) gewonnen worden. Dazu gehen wir zunächst über.

Bevor wir aber die numerischen Werthe für $\varrho_1\ \varrho_2\ T_1\ T_2\ u_1\ u_2$ und μ in (30) einführen, wollen wir dieselbe folgendermaassen umformen:

$$\left[\frac{(u_1-u_2)^2}{R(\mu-1)} - \frac{(P'-\varrho_2 T_2)^2}{\mu\varrho P'+\varrho_2{}^2 T_2} - \frac{(P'-\varrho_1 T_1)^2}{\mu\varrho_1 P'+\varrho_1{}^2 T_1}\right]^2 = \frac{4(P'-\varrho_2 T_2)^2(P'-\varrho_1 T_1)^2}{(\mu\varrho_2 P'+\varrho_2{}^2 T_2)(\mu\varrho_1 P'+\varrho_1{}^2 T_1)}.$$

Oder:

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned}&\left[\frac{(u_1-u_2)^2}{R(\mu-1)}\varrho_1\varrho_2(\mu P'+P_2)(\mu P'+P_1) - \varrho_1(P'-P_2)^2(\mu P'+P_1)\right.\\ &\left. - \varrho_2(P'-P_1)^2(\mu P'+P_2)\right]^2 = 4\varrho_1\varrho_2(P'-P_2)^2(P'\\ &- P_1)^2(\mu P'+P_2)(\mu P'+P_1),\end{aligned}\right.$$

wobei für $\varrho_1 T_1$ und $\varrho_2 T_2$, P_1 und P_2 resp. gesetzt worden.

Indem wir zunächst die numerischen Werthe für $\varrho_1\ \varrho_2$ etc., nämlich

$$\varrho_1 = \frac{13}{7}, \qquad \varrho_2 = 1, \qquad T_1 = \frac{273^0+21^0}{273^0}, \qquad T_2 = \frac{273_0+0^0}{273^0},$$

daher

$$P_1 = 2P_0, \qquad P_2 = P_0,$$

wo P_0 einem Druck von einer Atmosphäre entspricht,

$$u_1 = 5u_0\sqrt{\frac{3}{2.7.13}}, \quad u_2 = 0 \quad \text{und} \quad \mu = 6$$

jetzt in (32) einführen, und für P'/P_0 die neue Variable x setzen, erhalten wir hieraus nach einigen Umformungen die folgende Gleichung:

$$[3(6x+1)(3x+1) - 26(x-1)^2(3x+1) - 7(x-2)^2(6x+1)]^2 = 7.8.13(x-1)^2(x-2)^2(6x+1)(3x+1).$$

Diese Gleichung lässt sich auf folgende Gleichung sechsten Grades zurückführen:

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}&1296x^6 - 10728x^5 + 20617x^4 - 7250x^3 + 875x^2\\ &- 3294x - 311 = 0.\end{aligned}\right.$$

Man sieht nun, dass $x = 2$ annäherungsweise eine Wurzel

dieser Gleichung (33), wie ebenfalls eine Wurzel der ursprünglichen Relation (30) ist (nachdem man die numerischen Werthe in dieselbe eingetragen hat), und daher nach der obigen Auseinandersetzung, dass nämlich die Relation (30) blos eine einzige positive Wurzel besitzt, die gesuchte Lösung des Problems ist. Demnach könnte man ohne Weiteres dazu übergehen, allein diese Wurzel ($x = 2$ annäherungsweise) aus der Relation (30) resp. der Gleichung (33) zu berechnen, und zwar etwa nach der Newton'schen Näherungsmethode. Wir ziehen es jedoch vor, die Gleichung (33) ausführlich zu untersuchen, d. h. zuerst ihre Wurzeln aufzusuchen, alsdann dieselben einer genaueren Untersuchung zu unterwerfen, da wir hierdurch auf die Lösungen anderer interessanter Probleme geführt werden.

Zur Absonderung der Wurzeln der Gleichung (33) gehen wir jetzt über. Zu diesem Zwecke wenden wir zuerst den Satz von Stürm an. Dementsprechend haben wir die Stürm'schen Functionen $V, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$ und V_6 [1]) zu bilden. Dieselben lauten:

$$(34)\ ^{2}) \quad \begin{cases} V = 1296\,x^6 - 10728\,x^5 + 20617\,x^4 - 7250\,x^3 \\ \qquad\qquad + 875\,x^2 - 3294\,x - 311 \\ V_1 = 3888\,x^5 - 26820\,x^4 + 41234\,x^3 - 10845\,x^2 \\ \qquad\qquad + 875\,x - 1647 \\ V_2 = 5460\,x^4 - 15348\,x^3 + 4405\,x^2 + 2342\,x + 1068 \\ V_3 = 6573\,x^3 - 310\,x^2 - 6931\,x - 1464 \\ V_4 = -9450\,x^2 + 12352\,x + 2292 \\ V_5 = -5488\,x - 544 \\ V^6 = -976 \end{cases}$$

Durch Einsetzen von $x = -\infty$, 0 und $+\infty$ in diese Functionen, ersieht man zunächst, dass zwischen $x = -\infty$ und $x = 0$ eine reelle Wurzel der ursprünglichen Gleichung liegt, zwischen $x = 0$ und $x = +\infty$ aber drei reelle Wurzeln. Daher besitzt unsere Gleichung (33) eine negative, drei positive und zwei imaginäre Wurzeln. Dass die Gleichung (33) drei positive Wurzeln besitzt, steht blos scheinbar in Widerspruch mit

1) Vgl. etwa Serret's Handbuch der höheren Algebra. 1. p. 228.

2) Diese Functionen sind mit Hülfe der logarithmischen Tafel gebildet.

dem Ergebnisse, dass der Relation (30) blos eine einzige positive Wurzel genügt; in der That rühren die zwei in (33) neu auftretenden positiven Wurzeln davon her, dass die Eindeutigkeit der Quadratwurzelzeichen in (30) durch das Quadriren derselben verloren gegangen ist. Selbstverständlich können für das betreffende Problem allein die drei positiven Wurzeln eine Bedeutung haben. Durch Einsetzen verschiedener positiver Werthe für x in diese Functionen (34) ersieht man ebenso, dass von diesen drei positiven Wurzeln eine zwischen 0 und 1, eine zwischen 2 und 3, und eine zwischen 5 und 6 liegt. Die Wurzel, die zwischen 0 und 1 liegt, kann der Natur der Sache nach für die betreffende sich auflösende Discontinuität nicht die gesuchte sein. In der That ist sie die gesuchte Wurzel für den Fall, wo die Geschwindigkeit u_1 anstatt in die betreffende Richtung in die entgegengesetzte fällt, einer Verdünnungswelle entsprechend; denn die Gleichung für die letztere lautet ganz wie die obige Gleichung (33), welche zur Lösung des betreffenden Falles dient. Dass die zwischen 5 und 6 liegende positive Wurzel ebenfalls nicht die gesuchte sei, versteht sich fast von selbst. Ein exacter Beweis dafür ist aber folgender. Man setze diese Wurzel, die genauer gerechnet, den Werth 5,63—5,64 aufweist, in die zwei Werthe für u' ein; aus dem einen Werth:

$$u' = u_2 + \sqrt{\frac{R(\mu - 1)}{\mu \varrho_2 P' + \varrho_2^2 T_2}} (P' - \varrho_2 T_2)$$

folgt

$$u' = (0{,}642 + 0{,}843)\, u_0 = 1{,}485\, u_0 .$$

Dieser Werth für u' ist aber ein in sich widerspruchsvoller, da nach dem Zusammenstoss der Luftströme eine zwischen den beiden Geschwindigkeiten $u' = 0{,}642\, u_0$ und $u_2 = 0$ liegende Geschwindigkeit für die zwischen den beiden auseinanderlaufenden Verdichtungsstössen befindliche strömende Luft sich ergeben muss. Aus dem anderen Werthe für u':

$$u' = u_1 - \sqrt{\frac{R(\mu - 1)}{\mu \varrho_1 P' + \varrho_1^2 T_1}} (P' - \varrho_1 T_1)$$

erhält man:

$$u' = (0{,}642 - 0{,}843)\, u_0 = -\, 0{,}201\, u_0 .$$

einen Werth für u', der nicht in Uebereinstimmung mit dem ersten Werthe $u' = 1{,}485\, u_0$ steht. Wäre aber das Vorzeichen des Quadratwurzelausdrucks in dem zweiten Werth für u' positiv anstatt negativ, so stimmten die beiden Werthe von u' überein. Die Nichtübereinstimmung der abgeleiteten Gleichung (33) mit der ursprünglichen Relation (30) liegt, wie schon bemerkt, darin, dass in ersterer das Vorzeichen des Quadratwurzelausdrucks in der letzteren nicht mehr zur Geltung kommt.

Als Lösung unseres Problems bleibt blos die dritte positive zwischen 2—3 liegende Wurzel übrig. Genauer ausgewerthet erhält man für sie den Werth $x = 2{,}158$, d. h. $P' = 2{,}158\, P_0$. Aus den beiden Werthen für u' folgt hier derselbe Werth:

$$u' = 1{,}158 \sqrt{\frac{5\, k\, R\, P_0}{13{,}948\, k}} = 1{,}158\, u_0 \sqrt{\frac{5}{13{,}949 \cdot 1{,}4}} = 0{,}586\, u_0$$

$$u' = 0{,}642\, u_0 - 0{,}158 \sqrt{\frac{5\, k\, R\, P_0}{13{,}7 \cdot 14{,}948\, k}} = 0{,}642\, u_0$$
$$- 0{,}158\, u_0 \sqrt{\frac{5}{2{,}6 \cdot 149{,}48}} = 0{,}586\, u_0.$$

Ohne weiteres ergeben sich ferner aus den Bedingungsformeln (29) folgende Werthe für die übrigen gesuchten Grössen des zwischen den beiden Verdichtungsstössen liegenden Gebietes:

35)
$$\left\{\begin{array}{l} \varrho_1' = 1{,}9605, \quad \varrho_2' = 1{,}7097, \quad T_1' = \dfrac{273^0 + 34{,}5^0}{273^0}, \\ \text{einer Temperatur von } 34{,}5^0\,\text{C entsprechend;} \\ \qquad\qquad T_2' = \dfrac{273^0 + 71{,}7_0}{273^0}, \\ \text{einer Temperatur von } 71{,}7^0\,\text{C entsprechend.} \\ \qquad\qquad u' = 0{,}586\, u_0, \quad P' = 2{,}158\, P_0 \\ \qquad\qquad \eta = 1{,}412\, u_0, \quad \zeta = -\,0{,}431\, u_0. \end{array}\right.$$

Der Grenzfall $\varrho_1 T_1 = \varrho_2 T_2$, $u_1 \gtrless u_2$.

Dass dieser Fall mit den Formeln für eine einzige Schallwelle nicht in Uebereinstimmung gebracht werden kann, haben

wir schon auf p. 482 gesehen. Hier aber lässt sich derselbe ohne welche Schwierigkeit mit den Formeln für zwei auseinanderlaufende Verdichtungsstösse nicht nur in Einklang bringen, sondern sogar mittels derselben untersuchen. Es ergeben sich nämlich, aus analogen noch einfacheren Formeln[1]) als den allgemeineren (29) ohne weiteres die gesuchten Werthe für ϱ_1' T_1' etc., sobald man die zugehörige Bestimmungsgleichung für P' gelöst hat und diesen Werth für P' in die eben genannten einträgt. Die Bestimmungsgleichung selbst nimmt ebenfalls eine viel einfachere Gestalt an, als in dem allgemeineren Falle; für unseren speciellen Fall lautet dieselbe:

$$u_1 - u_2 = \sqrt{R(\mu-1)}\left\{\frac{P' - m P_0}{\sqrt{\mu\,\varrho_2 P' + \varrho_2 m P_0}} + \frac{P' - m P_0}{\sqrt{\mu\,\varrho_1 P' + \varrho_1 m P_0}}\right\}$$

wo $P_1 = P_2 = m P_0$ gesetzt worden. Diese Gleichung lässt sich nun durch mehrere Umformungen auf folgende Gleichung vierten Grades in $P'/P_0 = x$ reduciren:

$$(\varrho_1 + \varrho_2)^2 (x - m)^4 - \frac{2 k m}{\mu - 1}\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}\,(\varrho_1 + \varrho_2 - 2\sqrt{\varrho_1 \varrho_2})\,(\mu x + m)(x - m)^2 + \frac{k^2 m^2}{(\mu-1)^2}\varrho_1 \varrho_2 (\varrho_1 + \varrho_2 - 2\sqrt{\varrho_1 \varrho_2})^2 (\mu x + m)^2 - 4\,\varrho_1 \varrho_2 = 0\,.$$

Die weitere Verfolgung dieses Grenzfalls wird ohne die Einführung numerischer Werthe für die verschiedenen gegebenen Grössen mehrere Schwierigkeiten bieten. Mit einem numerischen Beispiel wollen wir uns aber hier nicht weiter aufhalten.

Auf p. 483 haben wir nun gesehen, dass die Discontinuität $P_1 \gtrless P_2$, $u_1 = u_2 = u$ unmöglich einen einzigen fortschreitenden Verdichtungsstoss liefern konnte. Ebenso kann dieselbe zwei auseinanderlaufende Verdichtungsstösse nicht ergeben, und zwar aus dem Grunde, weil für dieselben $u = u_1 > u' > u_2 = u$ sein muss, was unmöglich ist.

Analoger Weise wie auf p. 473 könnten wir hier diese aus der Anschauung gewonnene Bedingung $u_1 > u' > u_2$ für das Zustandekommen einer in zwei auseinanderlaufende Verdichtungsstösse sich auflösenden Discontinuität nach Riemann's Methode aus den Gleichungen, durch welche die von Riemann

1) Indem man in (29) $P_1 = P_2 = m P_0$ setzt.

3 0112 072841080

eingeführten r- und s-Curven definirt werden, verificiren. Daraus ergibt sich aber dasselbe Resultat, nämlich, dass die betreffende Discontinuität sich sofort in eine continuirliche Bewegung auflöst.[1])

Es ist mir noch eine angenehme Pflicht, Hrn. Geheimrath Prof. Dr. Boltzmann, in dessen mathematisch-physikalischem Oberseminare ich die Anregung zu dieser Arbeit empfangen habe, hierfür sowie für das freundliche Interesse, das er an dem Fortgange derselben nahm, auch an dieser Stelle meinen ehrerbietigsten Dank auszusprechen.

1) Erst nach der Vollendung dieser Arbeit ist dem Verfasser eine Abhandlung zur Hand gekommen, welche den Titel trägt: „On Plane and Spherical Sound-Waves of Finite Amplitude" by Charles V. Burton D. Sc Dieselbe ist in der Octobernummer der Physical Society of London erschienen. Hier sei blos bemerkt, dass nur der erste Theil dieser Abhandlung eine Beziehung zur vorliegenden Arbeit hat.